**ОПЕРАЦИИ НАД ДРОБНЫМИ ЧИСЛАМИ**

Логическую схему теории дробных чисел можно изобразить следующим образом.

**1. Что такое дробь. Основное свойство дроби. Целое число – частный случай дроби**

**4. Умножение дроби на целое число**

**3. Вычитание дробей**

**2. Сложение дробей**

**6. Умножение любого числа на дробь**

**7. Деление любого числа на дробь**

**5. Деление дроби на целое число**

 **1.Что такое дробь. Основное свойство дроби. Целое число – частный случай дроби.**

Возьмём два яблока. Каждое яблоко разрежем на три равные дольки. Получится шесть долек. Разложим эти шесть долек на три блюдечка поровну. На каждом блюдечке окажется две дольки. Возьмём одно блюдечко с двумя дольками и поставим его на отдельный стол.

 Теперь возьмём одно яблоко. Разрежем его на три равные дольки. Получатся дольки точно такие же, как в первом случае. Возьмём ещё одно блюдечко. Пустое. Положим на него две дольки. Возьмём и это блюдечко и поставим его на тот же отдельный стол рядом с первым. Внимательно разглядываем их, и что же мы видим? На столе стоят два одинаковых блюдечка, и в каждом блюдечке лежат по две одинаковых яблочных дольки.

Из проведённых рассуждений видно, что, если два яблока разделить на три, то получится столько же, сколько получится, если взять две доли от яблока, разделённого на три равные доли.

В одной из школ учителя были категорически против этого утверждения, поэтому я изощряюсь в подробностях.

Возникает вопрос. Каким числом можно охарактеризовать количество яблок, лежащее на каждом блюдечке? Среди целых чисел ничего подходящего нет. Давайте изобретать.

Одна долька получилась в результате того, что мы одно яблоко разделили на три одинаковые дольки. Дадим этой дольке название ОДНА ТРЕТЬ яблока. Следовательно, две дольки назовём ДВЕ ТРЕТИ яблока.

Итак, мы знаем, что на каждой тарелочке лежат ДВЕ ТРЕТИ яблока. Теперь нужен цифровой символ, который обозначает ДВЕ ТРЕТИ. Выше было сказано, что ДВЕ ТРЕТИ яблока получится, если два яблока разделить на три. Давайте воспользуемся этим и используем для обозначения количества ДВЕ ТРЕТИ выражение 2 : 3.

Точно так и поступили древние математики. Только вместо знака «:» они придумали другой знак. Этот знак изображается горизонтальной чёрточкой посреди строки. Число 2 (делимое) написали над чёрточкой, а число 3 (делитель) – под чёрточкой. Полученное выражение они назвали ДРОБЬ.

Следовательно ДРОБЬ это выражение типа $\frac{2}{3}$. Оно означает 2 : 3.

То есть

$$\frac{2}{3}=2 :3.$$

На этом Древние не остановились. Они делимому дали название ЧИСЛИТЕЛЬ, а делитель назвали ЗНАМЕНАТЕЛЬ.

Итак:

***Дробь это выражение типа*** $\frac{2}{3},$ ***которое следует читать две трети. Оно буквально означает* 2 : 3. *То есть*** $\frac{2}{3}=2 : 3.$

***Число* 2 *называется числителем, а число* 3 – *знаменателем.***

 ***Чтобы получить*** $\frac{2}{3}$ ***яблока можно взять одно яблоко, разделить на три дольки и взять две дольки.***

При повторном рассмотрении раздела «**1. Что такое дробь»** достаточно перечитывать последние 5 строк, выделенные курсивом.

Разъяснив, что такое дробь, ознакомимся с её основным свойством.

Итак, дробь это частное. У частного есть свойство, заключающееся в том, что оно не изменится, если делимое и делитель разделить или умножить на одно и то же число. Естественно это свойство частного автоматически переносится на дробь.

Отсюда вытекает основное свойство дроби.

***Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число.***

Основное свойство дроби позволило ввести операцию СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ.

***Деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же число называется сокращением дроби.***

Не следует считать, что теперь все числа разделяются на два вида: целые числа и дробные числа. Дело в том, что среди дробных чисел могут встретиться такие, у которых числитель больше знаменателя и кратен ему. Эти числа можно сократить на знаменатель они превратятся в целые числа.

Дробь, у которой числитель равен знаменателю, равна единице.

Можно поступить иначе. Целое число записать в виде дроби со знаменателем, равным единице, а потом, пользуясь основным свойством дроби, превратить это число в дробь с любым знаменателем.

Превратим число 3 в дробь со знаменателем 2.

$$3=\frac{3}{1}=\frac{3×2}{1×2}=\frac{6}{2.}$$

Итак, целое число это частный случай дробного числа. То есть вся дальнейшая арифметика, это арифметика дробных чисел.

**2. Сложение дробей.**

Проследим за сложением дробей  и .

Разрежем яблоко на семь равных долей. Возьмем две дольки. Это будет  яблока. Теперь возьмём три дольки. Это будет  яблока. Сложим две дольки и три дольки. Получится пять долек. А так как каждая долька получена путём деления целого яблока на семь равных долей, то пять долек яблока представляют собой  яблока.

Значит==.

***При сложении дробей с одинаковыми знаменателями получится дробь, числитель которой равен сумме числителей слагаемых дробей, а знаменатель равен знаменателю этих дробей.***

Заметим, что целое число можно представить как дробь со знаменателем единица или с любым другим знаменателем. Значит, правило сложения дробей содержит в себе правило сложения целых чисел.

Проследим за сложением дробей с разными знаменателями $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$. Прежде, чем складывать дроби, пользуясь основным свойством дроби, преобразуем данные дроби так, чтобы их знаменатели стали равными. Для этого числитель и знаменатель первой дроби умножим на знаменатель второй дроби.

$$\frac{2}{3}=\frac{2×7}{3×7}=\frac{14}{21}. $$

Теперь числитель и знаменатель второй дроби умножим на знаменатель первой дроби.

$$\frac{5}{7}=\frac{5×3}{7×3}=\frac{15}{21}.$$

Проделанная операция называется приведением дробей к общему знаменателю. Описанный способ приведения дробей к общему знаменателю, это простейший способ приведения. Он не всегда удобен. Совершенный способ приведения дробей к общему знаменателю хорошо описан в учебниках.

Приведя дроби к общему знаменателю, сложим их.

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{14}{21}+\frac{15}{21}=\frac{14+15}{21}=\frac{29}{21}.$$

**3. Вычитание дробей.**

**Вычитание дробей это операция, в которой мы по известной сумме и одному слагаемому находим второе слагаемое. Это операция, обратная сложению.**

Таким образом, если

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.$$

Тогда

.

 Отсюда следует:

***При вычитании дроби из дроби (при одинаковых знаменателях при уменьшаемом и вычитаемом) получится дробь, числитель которой равен разности числителей уменьшаемого и вычитаемого, а знаменатель такой же, как у уменьшаемого и вычитаемого.***

Так же, как правило сложения дробей, правило вычитания дробей содержит в себе правило вычитания целых чисел

***Если уменьшаемое и вычитаемое имеют разные знаменатели, то их надо привести к общему знаменателю, а потом произвести вычитание.***

**4. Умножение дроби на целое число.**

***Умножение дроби целое число это операция, в которой вычисляется сумма чисел, состоящая из одинаковых слагаемых равных этой дроби, а количество слагаемых равно данному целому числу.***

$$\frac{2}{7}×3=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2+2+2}{7}=\frac{2×3}{7}=\frac{6}{7}.$$

Отсюда вытекает правило:

***Чтобы умножить дробь на целое число, надо её числитель умножить на это число, а знаменатель оставит прежним.***

Как и в теории целых чисел числа $\frac{2}{7} и 3$ называются множимое и множитель (сомножители), а число $\frac{6}{7}$ – произведение.

**5. Деление дроби на целое число.**

Пусть в результате умножения дроби на целое число получилось:

$$\frac{2}{7}×3=\frac{6}{7}.$$

***Деление дроби на целое это операция, в которой мы по известным дробному произведению и целочисленному множителю находим неизвестное дробное множимое.***

Деление дроби на целое число это операция, обратная умножению дроби на целое число.

$$\frac{6}{7} :3= \frac{6 :3}{7}= \frac{2}{7}.$$

Отсюда вытекает правило:

***Чтобы разделить дробь на целое число, надо её числитель разделить на это число, а знаменатель оставить прежним.***

В данном случае число $\frac{6}{7}$ называется делимое, число 3 называется делитель, а число $\frac{2}{7}$ называется частное.

Сформулированное правило применимо только в том случае, если числитель делимого делится на делитель без остатка. Если это условие не выполняется, то поступим следующим образом.

Перед тем, как осуществить деление, пользуясь основным свойством дроби, умножим числитель и знаменатель делимого на делитель, а потом осуществим деление.

$$\frac{5}{7} :3= \frac{5×3}{7×3} :3= \frac{\left(5×3\right):3}{7×3}=\frac{5}{7×3}=\frac{5}{21}.$$

Отсюда вытекает более совершенное правило, применимое в любом случае.

***Чтобы разделить дробь на целое число, надо её знаменатель умножить на это число, а числитель оставить прежним.***

 **6. Умножение любого числа на дробь.**

Решим следующую задачу:

*З а д а ч а.* Одно яблоко весит 150 грамм. Сколько весят  яблока?

*Р е ш е н и е.* Чтобы получить  яблока, надо 2 яблока разделить на 3. Значит, чтобы найти вес  яблока, надо вес одного яблока умножить на 2, а результат разделить на 3. То есть вес  яблока равен (150$ × $2) : 3.

Обратим внимание, что порядок вычисления не изменится, если вес яблока будет дробным числом. Так если одно яблоко весит $\frac{3}{8}$ фунта, то $\frac{2}{3}$ яблока весят ($\frac{3}{8} ×2) :3$ (фунта).

Итак, для того, чтобы определить, сколько весят две трети яблока надо вес одного яблока 150 грамм (три восьмых фунта) умножить на число 2 (числитель дроби ), а результат разделить на число 3 (знаменатель дроби ).

Задача о весе двух третей яблока и подобные ей дали повод к тому, что было сформулировано следующее определение.

***Арифметическую операцию, в которой некоторое число (целое или дробное) умножается на числитель данной дроби, а результат делится на знаменатель этой же дроби, будем называть* УМНОЖЕНИЕ НА ДРОБЬ.**

Возникла новая операция. Каждая математическая операция обладает собственным символом. Но операция **УМНОЖЕНИЕ НА ДРОБЬ** собственного символа не приобрела. За что же её так обидели?

Никто её не обижал. Дело в том, что бывают дроби, у которых числитель кратен знаменателю. Эти дроби при сокращении становятся целыми числами. При этом операция умножение на дробь вырождается в операцию умножение на целое число.

То есть умножение на целое число является частным случаем операции умножение на дробь. Это позволило объединить обе операции под общим названием УМНОЖЕНИЕ и присвоить им общий символ «$×$».

Операция УМНОЖЕНИЕ НА ДРОБЬ записывается следующим образом:



Задачу о нахождении веса двух третьих яблока можно решить другим способом.

Чтобы получить  яблока, надо взять одно яблоко, разделить его на 3 равные доли и взять 2 доли, а чтобы найти вес  яблока, надо вес одного яблока разделить на 3, а результат умножить на 2. То есть вес  яблока равен (150 : 3) х 2.

Это решение позволяет сформулировать второе определение операции УМНОЖЕНИЕ НА ДРОБЬ.

***Арифметическую операцию, в которой некоторое число (целое или дробное) делят на знаменатель данной дроби, а результат умножают на числитель этой же дроби, будем называть* УМНОЖЕНИЕ НА ДРОБЬ.**

Окончательно операция умножения на дробь будет записываться следующим образом:

150(150, или 150(150: 3)

**7. Деление любого числа на дробь.**

Решаем следующую задачу:

*З а д а ч а:*  яблока весят 100 грамм. Сколько весит целое яблоко?

 *Р е ш е н и е:*  яблока весят 100 грамм. Значит вес  яблока равен 100 : 2 (грамм), а вес целого яблока равен (100 : 2) х 3 (грамм).

Появилась новая арифметическая операция, в которой число 100 делится на число 2 (числитель дроби ) а результат умножается на число 3 (знаменатель дроби ). Эта операция является обратной по отношению к операции умножение на дробь, и ей дали название ДЕЛЕНИЕ НА ДРОБЬ.

Очевидно, что способ решения задачи не изменится, если вес двух третьих яблока выражается дробным числом.

Вводим определение:

***Арифметическую операцию, в которой некоторое число (целое или дробное) делят на числитель данной дроби, а результат умножают на знаменатель этой же дроби, будем называть* ДЕЛЕНИЕ НА ДРОБЬ.**

Бывают дроби, у которых числитель кратен знаменателю. Эти дроби при сокращении становятся целыми числами. При этом операция деление на дробь вырождается в операцию деление на целое число.

Деление на целое число является частным случаем операции деление на дробь. Это позволило объединить обе операции под общим названием ДЕЛЕНИЕ и присвоить им общий символ «:».

Операция ДЕЛЕНИЕ НА ДРОБЬ будет записываться следующим образом:

100 :(100 : 2).

Подведём итоги.

В процессе развития теории дробных чисел появилась обыкновенная дробь вида $\frac{m}{n}$, где *m* и  *n* любые целые числа. При изучении обыкновенной дроби выяснилось, что целое число может быть получено из дроби, в которой числитель больше знаменателя и кратен знаменателю. Единица может быть получена из дроби, у которой числитель равен знаменателю.

Позже числа, которые могут быть представлены в виде $\frac{m}{n}$, получили название рациональные числа. Итогом всей арифметики стали четыре арифметических операции. Этими операциями являются: сложение, вычитание, умножение и деление рациональных чисел.